Sujet

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau potable.
À la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir, à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à la salinité de cette eau, c'est-à-dire à son taux de sel (en gramme par litre). Ce taux dans l'eau potable est de $0{,}12\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$ et on souhaite qu'il reste inférieur à $3{,}9\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$.

On modélise la situation en notant C la salinité exprimée en gramme par litre ($\mathrm{g \cdot L^{-1}}$) et t le temps écoulé en minute depuis le début de l'incident.
On suppose que l'évolution de la salinité est modélisée par l'équation différentielle (E) $y' + 0{,}01y = 0{,}045$.

1. Quelle est la salinité de l'eau dans le réservoir avant l'incident, c'est-à-dire à $t = 0$?

2. Résoudre l'équation (E) et déterminer la fonction C qui vérifie la condition initiale.

3. a. Justifier que la fonction C est strictement croissante.

b. Déterminer la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2} près.

c. Que devient la salinité de l'eau du réservoir si on n'intervient jamais ?

4. La salinité doit rester inférieure à $3{,}9\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$ pour que l'eau du réservoir reste potable.
De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident ? Justifier la réponse.